

Müşteri Yaşam Boyu Deneyimi (Customer Lifetime Value)

Zehra RIDVANOĞULLARI¹, Şadi Evren ŞEKER²

- Muğla Sıtkı Koçman Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü*
- Antalya Bilim Üniversitesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü*

Özet

Bu makalede Müşteri Yaşam Boyu Değerinin hangi alanlarda nasıl kullanıldığı ve hangi metotlarla nasıl elde edildiği ve bu metotların ne olduğu giriş seviyesinde açıklanmıştır. Bu makale, Müşteri Yaşam Boyu Değerini ve kullanılan metotları daha iyi açıklayabilmek açısından örneklerle desteklenmiştir. Kaggle isimli siteden elde edilen Online Retail isimli veri kümesiyle bir firmanın müşterilerinin işlem geçmişine ulaşılmıştır. Sonrasında makalede açıklanan metotlar uygulanarak müşterilerinin bu firmaya gelecekte ne kadar maddi değer katacağı saptanmaya çalışılmıştır. Bu makale, müşteri yaşam boyu değeri, bu değer tahminlemede kullanılan metotlar, gelecekte yapılabilecek işlem sayısı tahminlemesi ve elde edilen sonuçların toplandığı bir araştırma sunmaktadır. Bunların yanı sıra bir veri kümesine bu tahminlemeler uygulanmadan önce, hangi veri ön işleme metotları kullanılabilirliği de gösterilmiştir. Bu çıktılar firmayı yatırımlarını yönlendirme konusunda yardımcı olacaktır.

Anahtar Kelimeler: müşteri yaşam boyu değeri, makine öğrenmesi, veri analizi

Abstract

In this article, Customer Lifetime Value, how it is used in which areas and how it is obtained by which methods and what these methods are explained at the introductory level. This article is supplemented with examples to better explain Customer Lifetime Value and the methods used. With the data set named Online Retail obtained from a website named Kaggle, the transaction history of a company's customers has been reached. Afterwards, by applying the methods described below, it was tried to determine how much financial value their customers would add to this company in the future. This article presents customer lifetime value, methods for estimating this value, estimating the number of future transactions and an aggregation study of the results. In addition to these, it has been shown what kind of data preprocessing methods are used before applying these operations to a dataset. These outputs will help the firm to direct its investments.

Keywords: customer lifetime value, machine learning, data analysis

1.GİRİŞ

Müşteri Yaşam Boyu Değeri iş dünyası ve firmalar için büyük önem taşımaktadır. Bir müşterinin geçmişteki işlem dökümünün kullanılmasıyla gelecekte firmaya katacağı değer bugünkü maddi karşılığının tahminlenmesi sonucu elde edilir. Bu hesaplamalar için farklı modeller ve algoritmalar kullanılmaktadır. Bu çalışmanın amacı bir veri kümesiyle bir model üzerinden ilerleyerek müşteri yaşam boyu değerinin hesaplanması ve bazı tahminlemeler yapılması olacaktır.

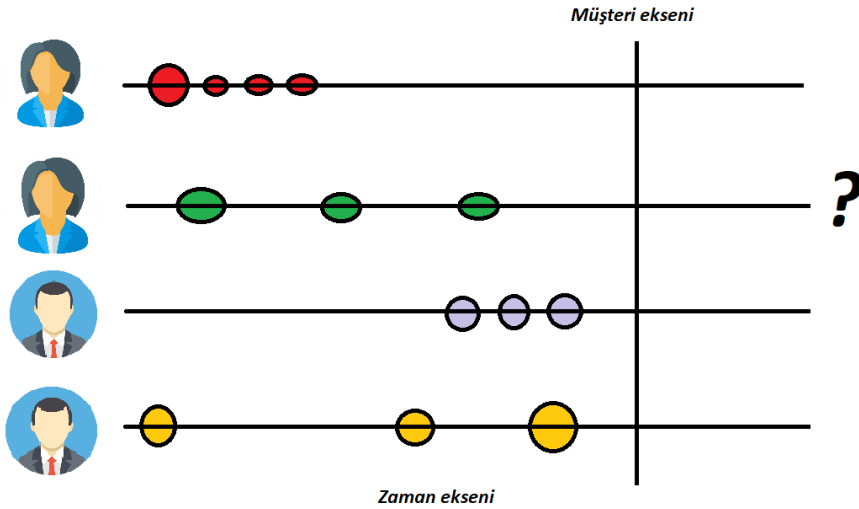
“Finding the Most Profitable customer using CLV” isimli araştırmaya göre pazarlama sektöründe müşteri yaşam boyu değeri bir insanın müşterisi olduğu bir şirkete, kuruluşa müşterisi olduğu süre boyunca kattığı maddi değer o

zamandaki karşılığıdır. Bu makaleye göre müşteri yaşam boyu değeri firmanın en değerli müşterilerini saptamak için önemli bir metriktir. Buna ek olarak bu değer firmalara istedikleri maddi geliri elde etmek için hangi müşterilerine ne gibi kaynaklar ayırmaları gerektiğini saptamak için önem arz etmektedir [1]. Bu değer tahminlemesi yapılırken dikkate alınması gereken varsayımlar şunlardır;

- Müşteri herhangi bir noktada satın alma işlemi yapmaya karar verebilir.
- Satın alma olasılığı her müşteri için farklıdır ve satın alma geçmişine bakılır.
- Bir müşteri satın alma işleminden sonra şirketle ilişkisini kesmeye karar verebilir.
- Müşteri kayıp olasılığı her müşteri için farklıdır ve satın alma geçmişine bakılır.

Müşteri yaşam boyu değerini etkileyen faktörler müşterinin ne sıklıkla, hangi yenilikle ve hangi büyüklükte alışveriş yaptığıdır. Bu değerın hesaplanması için geçmişte yapılmış işlemlerden oluşan bir veri kümesi kullanılır. Bu veri kümesinin analizi yapılır ve bazı metotlar kullanılarak müşterinin gelecekte firmaya ne kadar değer katacağının günümüz değerlerine göre yorumu yani Müşteri Yaşam Boyu Değeri tahminlemesi yapılır.

Şekil 1’de bir firmanın müşterileri görülebilir. Frekansın ve maddi büyüklüğün öneminden bahsedilmiştir. Aşağıdaki şekilde müşterilerin işlemleri dairelerle simgelenmiştir. Dairelerin büyüklüğüne göre işlem büyüklüğü yorumlanabilir. Dikey çizgi ise geçmişte yapılan işlemler ile gelecekte yapılacak işlemleri ayırmayı temsil etmektedir. Örneğin kırmızı renkle gösterilen müşterinin sık alışveriş yaptığı görülebilir fakat yalnızca küçük bir periyotta olduğundan genel zaman periyodu tahmin edilemeyebilir bu sebepten bu müşterinin Müşteri Yaşam Boyu Değeri düşük tahminlenecektir ve orta ya da düşük segment bir müşteri şeklinde sınıflandırılacaktır.



Şekil 1. Bir firmanın müşterilerinin belli bir periyottaki işlem büyüklükleri ve frekansı

2. LİTERATÜR'DE MÜŞTERİ YAŞAM BOYU DEĞERİ

Literatüre bakıldığında “Finding the Most Profitable customer using CLV” isimli Prathima J, Vaishnavi M, Perumal-raj R and Kamalesh S’ e göre CLV müşteri segmentasyonu ve en değerli müşterileri saptamak için kullanılmaktadır [1]. Araştırmaya göre müşteri yaşam boyu değeri aşağıdaki şekilde hesaplanabilir;

$$CLV = (\text{Gelecekte yapılması tahminlenen işlem sayısı}) * (\text{İşlem başına düşen maddi gelir})$$

Veri kümesi kullanılarak gelecekte tahminlenen işlem sayısını Python LifeTimes [2] kütüphanesinin gerekli fonksiyonu ve geçmiş alışveriş verileri kullanılarak hesaplanmıştır. Alışveriş verilerinden yola çıkarak ortalama işlem başına düşen maddi gelir hesaplaması yapılmaktadır.

Bu araştırmada Online Retail ve birçok farklı veri kümesi daha kullanılmıştır. RFMT(Yenilik, Frekans, Maddi Değer) ve BG/NBD (Beta Geometrik/Negatif Binom Dağılımı) modeli kullanılarak en değerli müşteriler saptanabilen ve CLV (Customer Lifetime Value) tahminleyebilen bir web uygulaması geliştirilmiştir [1].

Bu modellerin kullanımının sonucunda kullanılan veri kümelerindeki en değerli müşteriler ve CLV değerleri tahminlenmiştir. Bu sonuçlar ışığında müşteri yaşam boyu değerinin firmaya müşteri kazandırmak ve müşterileri firma için daha değerli hale getirebilmek için yatırımların yönlendirilmesi konusunda yardımcı olduğundan bahsedilmiştir.

CLV ve onun hakkında araştırma bileşenleri aktif bir alandır ve bu konuda birçok araştırma vardır. CLV veya onun tahmin yöntemlerini öneren makaleler çeşitli koşullar altında bileşenleri, öncüllerini incelemek, bazı pazarlama eylemleri alanında onu en üst düzeye çıkarmaya çalışmak veya uygulamalarını tartışır [3].

Müşteri yaşam boyu değerinin firmanın hedefleri için müşteri seçme, müşteriler için yapılacak yatırımlar için karar verme ve gelecekteki karı maksimuma çıkaracak müşterileri seçme konularında tutarlı kararlar vermek için önemli bir araçtır [4].

Firmaların satışlarını artırabilmek ve kendi ömürlerini uzatabilmek için yeni müşteriler elde etmek ve var olan müşterilerini korumak zorundadırlar. Bu denklemde müşteri, onlar için en değerli pazarlama aracı olmaktadır [5].

Bir müşterinin CLV'si, tipik olarak, müşteri davranışını ve karlılığı tahmin etmek için şirketin veri tabanındaki müşteri davranışı verileri kullanılarak değerlendirilir [6].

CLV tipik olarak bireysel bir müşteri veya segment düzeyinde tanımlanır ve tahmin edilir. Bu, yalnızca ortalama karlılığı incelemek yerine diğerlerinden daha karlı olan müşterileri ayırt etmemizi sağlar. İkincisi, finanstan farklı olarak CLV, bir müşterinin gelecekte rakiplerine karşı taraf olma olasılığını açıkça içerir [7].

Mevcut CLV hesaplama yöntemleri iki tür olarak sınıflandırılmıştır: geçmiş müşteri davranışını dikkate alan modeller ve hem geçmiş hem de gelecekteki davranışları göz önünde bulunduran modellerdir [1].

Uygulanan varyans analizleri sonucunda serbest muhasebeci ve mali müşavirlerin müşterilerinin tabi oldukları defter türleri ve müşterilerin meslek grupları itibariyle yaşam boyu değerleri açısından aralarında çok anlamlı bir farklılık olduğu tespit edilmiştir [8].

3. PROBLEMİN TANIMI VE VERİ KÜMESİ

Yukarıda bahsettiğimiz gibi firmalar yatırımlarını yönlendirmek için Müşteri Yaşam Boyu Değeri hesaplar ve müşterilerini segmentlere ayırırlar. Müşteri yaşam boyu değeri hesaplanan birçok örnek görebiliriz. Bu örneklerden biri olan “Finding the Most Profitable customer using CLV” isimli araştırmada RFM (Yenilik, Frekans, Maddi Değer) metodu ile beraber müşteri tahminlemeleri için BG/NBD ve Gamma-Gamma modelleme metodu [9] kullanılmış ve sonrasında Müşteri Yaşam Boyu Değeri tahminlemesi yapılmıştır.

R-Recency– Yenilik bir müşterinin son işlemi ve ilk işlemi arasındaki süreden ibarettir. Yani bir müşteri yalnızca bir işlem yapmışsa yenilik değeri için 0 denilebilir.

F-Frequency– Sıklık, müşterinin yaptığı işlemlerin sıklığını temsil eder.

M-Monetary– Gelir değeri, müşterinin firmayla olan ilişkisi süresince yaptığı işlemlerin maddi toplamıdır.

T-Time- Yaş değeri ise bir müşterinin yaşını yani firmayla gerçekleştirdiği ilk işlemi ile son işlemi arasındaki süreyi tanımlar.

RFMT metodunun uygulanabilmesi için firmanın geçmiş işlemler veri kümesi gereklidir. Bu değerleri hesaplamak için müşterinin işlemi gerçekleştirdiği tarihler, işlemin maddi büyüklüğü gibi özelliklere ihtiyaç duyulur. Bu verilere uygunluğu açısından Kaggle sağlayıcısından Online Retail isimli bir veri kümesi kullanılmıştır.

Tablo 1. Veri kümesi kolon bilgileri

Kolon İsmi	Kolon Açıklaması
InvoiceNo	Fatura Numarası
StockCode	Stok Kodu
Description	Ürün Açıklaması
Quantity	Adet
InvoiceDate	Fatura Tarihi
UnitPrice	Birim Fiyatı
CustomerID	Müşteri Kimlik Numarası
Country	Ülke

Tablo 1’de veri kümesinin kolon sayısı ve kolon isimleri görülebilir. Veri kümesinin kolon içerikleri ise InvoiceNo (Fatura Numarası), StockCode (Stok Kodu), Description (Ürün Açıklaması), Quantity (Ürün Sayısı), InvoiceDate (Fatura Tarihi), UnitPrice (Birim Fiyatı), CustomerID (Müşteri ID) ve Country (Ülke) şeklindedir. Veri kümesi incelendiğinde 135080 satırda eksik değer olduğu saptanmıştır.

Sayısal değerlerin maksimum, minimum değerler gibi istatistikleri Tablo 2’de sunulmuştur.

Tablo 2. Sayısal değerlerin istatistiksel özeti

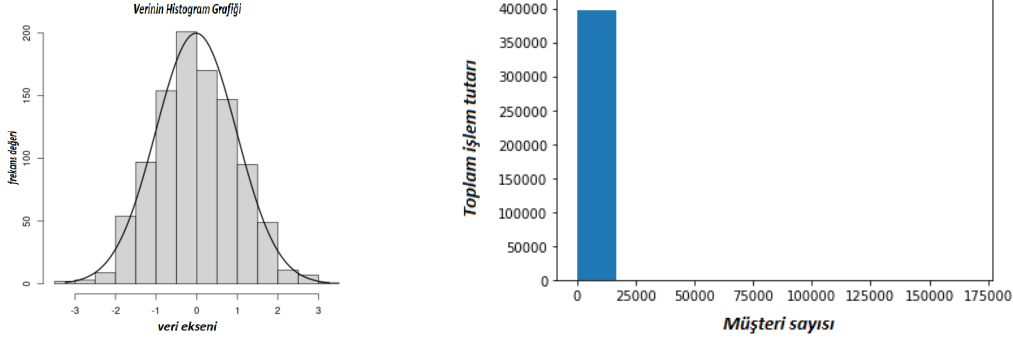
	Adet	Birim Fiyatı
Ortalama	9.552250	4.611
Minimum	-80995.0	-11062.1
Maksimum	80955.0	38970.0

3. METODOLOJİ

“Finding the Most Profitable customer using CLV” isimli akademik makalede müşteri yaşam boyu değeri tahminlemesi yapılırken öncelikle yenilik, sıklık, toplam işlem maddi değeri ve yaş verilerinin hesaplanması için RFMT ve BG-NBD & Gamma-Gamma modelleri ile gelecekteki gelir değerleri modellenmesi yapıldı. Sonrasında bu değerler kullanılarak CLV(Müşteri Yaşam Boyu Değeri) hesaplandı. Bu çalışmadaki işlemler ayrıntılı olarak aşağıda sıralanmıştır.

- Bu makalede öncelikle veri kümesine erişildi.
- Veri kümesi içerisindeki eksik değerler müşterinin gelecekte de müşteri olma ihtimalini etkileyebileceği gerekçesiyle silinerek temizlendi.
- Her müşteriye özel toplam işlem değerinin hesaplanabilmesi için UnitPrice (Birim Fiyatı) ve Quantity(Ürün sayısı) kolonları çarpılarak TotalPrice (Toplam İşlem Değeri) oluşturuldu.
- Toplam İşlem Değeri sıfıra eşit veya küçük değerler müşteriyle ilgili bilgi sağlayamayacağından veri kümesinden silindi.
- InvoiceNo (Fatura Numarası) isimli kolonda “C” harfini içeren değerler Cancellation (İptal) edilen siparişler olduğundan müşterinin alışveriş işlem tutarı ile ilgili bilgi veremeyeceğinden veri kümesinden çıkarıldı.
- InvoiceDate isimli kolonun veri tipi datetime formatına dönüştürülür.
- Veri kümesinin içerisindeki aykırı değerlerin kontrolü için histogram oluşturuldu.

Online Retail veri kümesinin görselleştirilmesi Şekil 2’de sunulmuştur. x eksenini işlem başı maddi geliri ve y eksenini ise o maddi değerlerin frekansını göstermektedir. Görüldüğü üzere bütün veri 0 ile 25000 arasında gösterilmektedir. Ölçeğin yüksek değerlere kaymış olması elimizde ortalamadan uzakta değerler (outlier) olduğu anlamına gelebilir.



Şekil 2. Online Retail veri kümesinin dağılım grafiği

3.1 BG/NBD Modeli

Müşterinin işlem frekansını hesaplamak için kullanılan Beta Geometrik/Negatif Binom Dağılımı (Beta Geometric/Negative Binomial Distribution) modeli kullanılmıştır. Bu modelin bakış açısı bir müşterinin satın alma ve o firmanın müşterisi olmayı bırakma ihtimallerinin kombinasyonudur. Bu araştırmaya göre yüksek frekans değeri düşük frekans değerli müşterilerle karşılaştırıldığında gelecekte daha düşük satın alma işlemi ihtimaline sahiptir [10].

Bu model dört parametreyle çalışmaktadır;

- Tahmin edilmek istenen gün uzaklığı
- Frekans (Frequency)
- Yenilik (Recency)
- T değeri (Yaş değeri)

Bu model kullanılarak müşterinin gelecekte yapacağı işlem sayısı, gelecekte halen firmanın müşterisi olma ihtimali tahminlemeleri yapıldı. Bu işlemleri gerçekleştirmek için Python lifetimes kütüphanesinin içeriğinde yer alan fonksiyonlar kullanıldı.

3.2 Gamma-Gamma Modeli

Bu model müşterinin firmaya müşterisi olduğu süre boyunca kattığı değer tahminlemesi için kullanılır. Bu modeli kullanabilmek için frekans ve gelir değerlerinin düşük bir korelasyon değerine sahip olmaları gerekmektedir.

Online Retail veri kümesi ile Gamma-Gamma modellenmesi yapılması için Python lifetimes isimli kütüphanesi kullanıldı ve bazı fonksiyonlar kullanılarak bazı işlemler yapıldı.

4.SAYISAL SONUÇLAR

Ön işleme uygulanmış veri kümesi kullanılarak BG/NBD modeli oluşturuldu.

Kod 1'de belirtildiği gibi "bgf" isimli değişkenle BetaGeoFitter modeli modellendi. Fonksiyonun "penalizer_coef" olan fonksiyonun kendi argümanı için sayısal değer verildi. Model veri kümesinin frekans, yenilik ve yaş kolonlarıyla eğitildi.

```
bgf ← lifetimes.BetaGeoFitter(penalizer_coef = 0.0)
bgf.fit(summary["frequency"], summary["recency"], summary["T"])
```

Kod 1. Veri kümesi kullanılarak BG/NBD modellenmesi

Bu model kullanılarak firmanın geçmişteki müşterilerinin şu an müşterisi olma olasılığı hesaplandı ve Tablo 3 olarak sunulmuştur.

Tablo 3. Hayatta olma ihtimalleri kolonu içeren veri özet tablosu

Müşteri Kimlik Numarası	Frekans	Yenilik	Yaş	Toplam İşlem Değeri	Hayatta olma ihtimali
12347.0	6.0	365.0	367.0	599.70	0.999
12348.0	3.0	358.0	301.5	301.48	0.997
12352.0	6.0	296.0	368.2	368.25	0.998
12356.0	2.0	325.0	269.9	269.90	0.998

Tablo 3’de görülen “Frekans, Yenilik, Yaş ve Gelir Miktarı” kullanılarak “Hayatta olma ihtimali” değeri tahminlenmesi yapıldı. Makalede bahsedildiği üzere gelecekte işlem yapma ihtimali yüksek olan müşteriye frekans değeri ve alışveriş tutarı yardımcı olmaktadır. Birinci sırada görülen 12347 kodlu müşterinin frekans değeri 6 dır ve toplam işlem değeri diğer müşterilere kıyasla daha fazladır, dolayısıyla bu müşteri birinci sıraya yerleşmiştir.

Online Retail veri kümesi kullanılarak yapılan tahminlemeler sonucunda gelecekteki bir ay içinde hangi müşterinin tahmini kaç defa alışveriş yapacağı tahminlenmesi yapıldı ve frekans değerleri ile beraber Tablo 4 olarak sunuldu.

Tablo 4. Tahmini alışverişler kolonu içeren veri özet tablosu

Müşteri Kimlik Numarası	Frekans	Tahmini İşlem Sayısı
14911	131.0	9
17841	111.0	8
12748	112.0	8
14606	88.0	6

Sonuç olarak 14911 numaralı müşterinin işlem sayısının yüksek tahminlenmesinin sebebi hesaplanan frekans değerinin yüksek çıkmasıdır.

BG/NBD ile modellendikten sonra CLV değerini, gelecekte belli bir periyotta hangi müşterilerin en değerli olabileceğini tahminlemesi için Gamma-Gamma modeli kullanılacaktır.

Gamma-Gamma modeli için frekans ve gelir değerlerinin arasında bir yüksek korelasyon ilişkisi olmaması gerekmektedir. Online Retail veri kümesi için kontrol ettiğimizde Şekil 3’te görüldüğü gibi korelasyon katsayısı araştırma sırasında görülen küçük değerlere yakın olduğundan Gamma-Gamma modeli kullanılabilir.

```
#Correlation
pearsonr(return_customers_summary["frequency"],return_customers_summary["monetary_value"])
✓ 0.1s
(0.015905612042857637, 0.40101030970386686)
```

Şekil 3. frequency ve monetary value korelasyon değeri

Kod 2’de açıklandığı gibi “ggf” isimli değişkenle Lifetimes kütüphanesinden GammaGammaFitter fonksiyonu kullanılarak GammaGamma modeli modellendi. Verinin frekans ve toplam işlem değeri kolonları kullanılarak model hazırlanmıştır.

```
ggf ← lifetimes.GammaGammaFitter(penalizer_coef=0.001)
ggf.fit(return_customers_summary["frequency"],
return_customers_summary["monetary_value"])
```

Kod 2. Veri kümesi kullanılarak GammaGamma modellenmesi

Zaman 1 ay olarak belirlenerek ve frekans, yenilik, yaş, toplam işlem değeri, zaman değeri ve modelin “customer_lifetime_value” isimli fonksiyon kullanılarak Kod 3’teki işlemlerle CLV tahminlenmesi yapılmıştır.

```
time ← 1
summary["predicted_clv"] ← ggf.customer_lifetime_value(bgf,
summary["frequency"], summary["recency"], summary["T"],
summary["monetary_value"], time, freq = "D", discount_rate = 0.01)
```

Kod 3. CLV tahminlenmesi

OptiWisdom (OptiWisdom AI Company - R&D Center, <https://optiwisdom.com/tr>) isimli şirketin Müşteri Yaşam boyu tahminlemeleri için programladığı bir motor olan kolay.ai ile aynı verinin üzerinden ilerleyerek bu makale içerisindeki algoritma ile motorun arka kısmında çalışan algoritma karşılaştırıldı.

Müşteri Yaşam Boyu Değeri tahminlemeleri konusunda henüz net bir kural olmadığından kullanılan algoritmaların farklılığından doğduğu düşünülen farklılıkları ortaya çıktı. Ve algoritmaların verdiği sonuçların istatistiksel özeti Tablo 5'te sunulmuştur.

Tablo 5. Kolay.ai ve makale sonuçları karşılaştırması

	Maksimum MYBD	Ortalama MYBD	Minimum MYBD
Kolay.ai	47672.331084	-1203.964139	-23779.554497
Makale Sonucu	6413.805978	-175.546147	-32065.585625

*MYBD = Müşteri Yaşam boyu değeri

5.SONUÇ

Online Retail veri kümesini analiz etmek ve müşterilerin geçmiş işlem verilerini kullanarak CLV değerlerini hesaplamak için kullanılan birden fazla model ve algoritma olduğundan uygulayabileceğim bir model seçmek makalenin zor kısmını oluşturdu. BG/NBD ve GammaGamma modellerinin tercih edilmesinde müşteriyle ilgili CLV'ye ek olarak farklı bilgiler verebilecek fonksiyonlar önemli rol oynadı. BG/NBD ve Gamma-Gamma modelleri bu doğrultuda tercih edildi. Daha sonrasında modelleri anlamak ve uygulamaya koymak kısmen daha kolay bir süreçti.

Online Retail verisi için alınan CLV tahminleme bu firma için yatırımlarını yönlendirme açısından çok önemli bir araştırma haline gelmiştir. Gerçek hayatta bu değerlerin firma için çok önemli olduğu söylenebilir. Bu durumda müşteri yaşam boyu değeri firmanın gelecekte daha fazla kar sağlayabileceği, hedefleri için doğru müşterileri seçebileceği ve yatırımlarını yönlendirilebileceği bir ortam oluşturabilecektir.

Kolay.ai ile yapılan karşılaştırmada arka planda çalışma prensiplerinin farklı olmasından dolayı sonuçların farklı olduğu ortaya konmuştur.

KAYNAKÇA

- [1] P. J, V. M, P. R ve K. S, «Finding the Most Profitable customer using CLV,» International Journal of Research in Engineering and Science (IJRES), cilt 9, no. 7, pp. 47-50, 2021.
- [2] C. Davidson-Pilon, «lifetimes Documentation,» 2020.
- [3] R. C. Blattberg, E. C. Malthouse ve S. A. Neslin, «Customer Lifetime Value: Empirical Generalizations and Some Conceptual Questions,» Journal of Interactive Marketing, cilt 23, no. 2, pp. 157-168, 2009.
- [4] V. Kumar, T. Bohling, R. Venkatesan ve D. Beckmann, «The Power of CLV: Managing Customer Lifetime Value at IBM,» Marketing Science, cilt 27, no. 4, p. 2, 2008.
- [5] R. Yörük ve R. Eşmekaya, «Customer Lifetime Value (Müşteri Yaşamboyu Değeri),» YBS Ansiklopedi, cilt 5, no. 2, pp. 26-40, 2018.
- [6] B. Donkers, P. C. Verhoef ve M. G. de Jong, «Modeling CLV: A test of competing models,» Quantitative Marketing and Economics, p. 163–190, 2007.
- [7] S. Gupta, D. Hanssens, B. Hardie, W. Kahn, V. Kumar, N. Lin, N. Ravishanker ve S. Sriram, «Modeling Customer Lifetime Value,» Journal of Service Research, cilt 9, no. 2, p. 139, 2006.

- [8] T. Ş. Yapraklı ve E. Keser, «MÜŞTERİ YAŞAM BOYU DEĞERİNİN ANALİZİ: BİR SAHA ARAŞTIRMASI».
- [9] P. S. Fader ve B. G. S. Hardie, «The Gamma-Gamma Model of Monetary,» 2013.
- [10] P. S. Hardie, B. G. S. Hardie ve K. L. Lee, «"Counting Your Customers" the Easy Way: An Alternative to the Pareto/NBD Model,» Marketing Science, cilt 24, no. 2, pp. 275-284, 2005.